Het haberdasher's probleem van Dudeney

Simon van der Salm

Kwadratuur van de cirkel

Bekend is de uitdrukking voor moeilijk of niet oplosbare problemen: *dat lijkt wel de kwadratuur van de cirkel*. Dit sluit mooi aan bij het artikel hierboven van Otto van Poelje over passers. De kwadratuur van de cirkel houdt immers in, het construeren met behulp van uitsluitend passer en liniaal (zonder maatverdeling) van een vierkant dat exact dezelfde oppervlakte heeft als de cirkel. Kortom een prachtig voorbeeld uit de Euclidische meetkunde, zoals wij oudjes die nog leerden op de middelbare school. Het probleem van het construeren van de kwadratuur van de cirkel werd al in de Griekse Oudheid geformuleerd en heeft een paar duizend jaar lang wiskundigen beziggehouden. Er zijn honderden, misschien wel duizenden, soms zeer ingenieuze, benaderingen bekend, maar van al die benaderingen kan men bewijzen dat het vierkant niet *exact* dezelfde oppervlakte heeft als de cirkel.

Tot 1882 begreep men niet waarom niemand er in slaagde een exacte constructie te vinden. In 1882 liet Carl Louis Ferdinand von Lindemann echter zien waarom de (exacte) kwadratuur van de cirkel onmogelijk is. Lindemann bewees namelijk dat π een transcendent getal is, niet kan optreden als de oplossing van een algebraïsche vergelijking, en de kwadratuur van de cirkel onmogelijk is. De kwadratuur van de cirkel is dus werkelijk een onmogelijk op te lossen probleem.

Kwadratuur van een gelijkzijdige driehoek

Er zijn soortgelijke problemen als de kwadratuur van de cirkel bekend. Toen ik nog voor de klas op de middelbare school stond stond. behandelde ik soms de *kwadratuur van de gelijkzijdige driehoek*, die alleen al door zijn mooie plaatjes heel aantrekkelijk is, en daadwerkelijk opgelost kan worden. Bij deze kwadratuur eist men dat de kwadratuur ook nog in een continue beweging en met zo min mogelijk driehoeken moet worden verkregen. De oplossing werd in 1905 gepubliceerd.

Figuur 1 (zie [1]) toont dat het mogelijk is een gelijkzijdige driehoek zodanig in slechts vier delen op te splitsen, dat met de afzonderlijke delen een vierkant met dezelfde oppervlakte kan worden geconstrueerd: een *kwadratuur van de gelijkzijdige driehoek*.

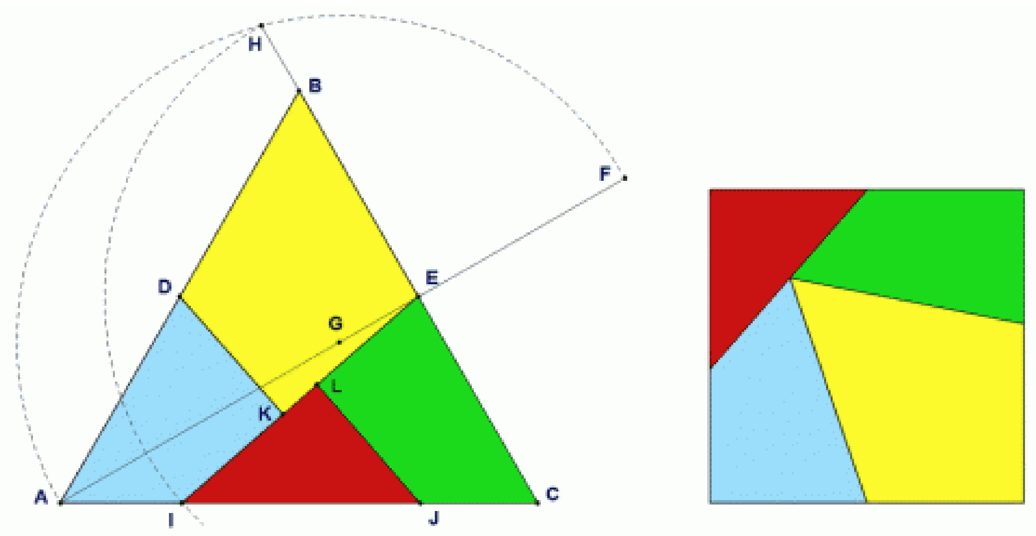

Fig. 1.

Kwadratuur van de gelijkzijdige driehoek

Door de onderdelen scharnierend met elkaar te verbinden, kan in één *continue* beweging de driehoek in een vierkant worden getransformeerd of omgekeerd, het vierkant in de driehoek. Hierbij blijven de vier onderdelen altijd met elkaar verbonden. Zie bijvoorbeeld de website [2], waar een mooie animatie te vinden is.

Wie – net zoals ik – denkt dat hier sprake is van een eenvoudige opdeling van de driehoek, waarbij de basis van de driehoek wordt verdeeld in de verhoudingen 1 : 2 : 1, komt bedrogen uit. Toen ik de driehoek voor het eerst uitknipte en van de delen een vierkant probeerde te maken, bleek er net geen vierkant te worden gevonden. Een tweede mislukte poging, maar veel netter, liet zien dat er inderdaad meer aan de hand is met deze dissectie dan je op het eerste gezicht vermoedt. De verhoudingen tussen de delen van de linkerzijde van de driehoek kunnen namelijk niet 1 : 2 : 1 zijn! Maar wat zijn die verhoudingen dan wel?

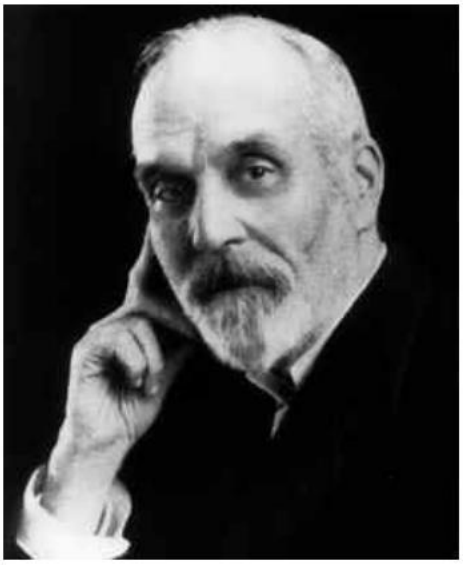

Fig.2. H.E. Dudeney

Henry Ernest Dudeney (1857 – 1930)

We hebben hier te maken hebben met een probleem met interessante historische wortels. In de meetkunde kennen we een stelling van *Bolyai* uit 1833: twee veelhoeken met dezelfde oppervlakte kan men samenstellen uit een eindig aantal paarsgewijs congruente driehoeken. Daaruit volgt dat van iedere veelhoek een kwadratuur door middel van een eindig aantal driehoeken bestaat. De vraag of er een analoge stelling bestaat voor veelvlakken, is het zogenaamde *derde probleem van Hilbert,* één van die beroemde mathematische problemen die aan het begin van de twintigste eeuw werden geformuleerd.

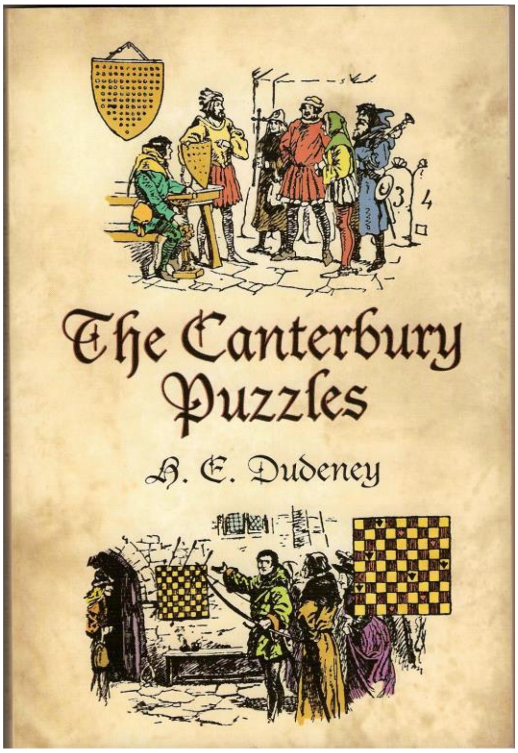

Fig. 3. Wiskundige raadsels

De constructie in figuur 1 werd rond 1905 bedacht door *Henry Ernest Dudeney*, een bekende naam voor hen die geïnteresseerd zijn in wiskundige spelletjes en puzzels. Ondanks het feit dat de naam Dudeney in de wetenschappelijke wereld niet veel wordt genoemd, behoren de publicaties van Dudeney misschien wel tot de meest gelezen wiskundige werken. Dudeney was een talentvolle autodidact op het gebied van wiskunde en andere exacte vakken. Zie [3] voor een uitgebreide biografie. Hij hield zich al op zeer jonge leeftijd intensief bezig met wiskunde, astronomie en in bijzonder met het schaakspel.

Ingewikkelde schaakproblemen hadden zijn interesse. Al op 9 jarige leeftijd publiceerde hij nieuwe schaakproblemen en wiskundige puzzels in een lokale krant. Toen hij 13 was begon Dudeney als klerk te werken in de Civil Service. In zijn vrije tijd bestudeerde hij wiskundige werken en theoretische uiteenzettingen over het schaakspel. Hij was in 1918 één van de oprichters en de eerste voorzitter van de *British Chess Problem Society*.

Dudeney publiceerde gedurende meer dan 30 jaar bijna wekelijks nieuwe mathematische puzzels in diverse kranten en tijdschriften. Zijn boeken, voornamelijk collecties van wiskundig georiënteerde puzzels, waren in zijn tijd zeer populair. Onder andere zijn *The Canterbury Puzzles* uit 1907 (zie figuur

3 en referentie [4]) en *Amusements in Mathematics* uit 1917 nog steeds, als herdruk, bij Dover verkrijgbaar. Vermoedelijk vormen de wiskundeleraren, die ook spelletjesfanaat zijn, nog steeds een aantrekkelijke markt waarop de boeken van Dudeney gretig aftrek vinden.

The Canterbury Puzzles

The Canterbury Puzzles zijn genoemd naar *The Canterbury Tales*, een laatmiddeleeuws boek van de Engelse auteur *Geoffrey Chaucer* (1342-1400). Zie figuur 4. Op een dag huurt de schrijver een kamer in *The Tabard*, een herberg in Southwark, een plaats die tegenwoordig tot Londen ten zuiden van de Theems behoort. De herberg was een verzamelplaats van pelgrims, die op weg waren naar het graf van de heilige *Thomas à Becket* in Canterbury. In de *Tales* beschrijft de auteur uitvoerig de persoonlijkheid en het beroep van zijn 29 reisgenoten en tevens dat van de herbergier, *Harry Bailey*. De herbergier stelt voor dat iedere pelgrim tijdens de tocht een aantal verhalen zou vertellen, twee op de heenweg en twee op de terugweg, om de toentertijd zo de moeizame tocht naar Canterbury wat aangenamer te maken.

Fig. 4. Geoffrey Chaucer (1342-1400)

Eén van de pelgrims is een *haberdasher*, een handelaar in fournituren, zoals garen, naalden, knopen, band, en dergelijke. Deze *haberdasher* is één van de personen die echter geen verhaal vertelt in de *Tales,* omdat Chaucer het werk niet heeft kunnen voltooien.

In *The Canterbury Puzzles* van Dudeney treden de pelgrims en de herbergier uit het boek van Chaucer, ruim 500 jaar later, nogmaals op, maar nu om elkaar mathematische puzzels en problemen voor te leggen. Het beroemdste probleem van *The Canterbury Puzzles* is het zesentwintigste, en dat wordt nu juist aan de andere pelgrims voorgelegd door de *haberdasher*, die in het boek van Chaucer niet aan het woord komt.

De *Haberdasher's Puzzle*, voor het eerst gepubliceerd in 1902, is de vraag hoe een gelijkzijdige driehoek in vier delen kan worden verdeeld, zodanig dat de delen een vierkant vormen. In 1902 ontving Dudeney in een brief de correcte oplossing van een zekere M'Elroy, maar kennelijk werd de oplossing niet gepubliceerd, want in 1905 werd het probleem nogmaals uitvoerig in de *Daily Mail* besproken. Dudeney ontving honderden, foutieve, oplossingen, niemand bleek in staat het probleem correct op te lossen.

De scharnierpuzzel

Dudeney construeerde vervolgens een model met drie scharnieren, waarmee hij liet zien dat in één vloeiende beweging het vierkant kan worden getransformeerd in de gelijkzijdige driehoek en omgekeerd. Daarom wordt het zesentwintigste probleem uit de Canterbury Puzzles ook wel de *scharnierpuzzel van Dudeney* genoemd.

Eén en ander trok zodanig de aandacht van de wetenschappelijke wereld, dat Dudeney in 1905 door de *Royal Society* werd uitgenodigd een lezing te geven over de *Haberdasher's Puzzle.* Voor een verbaasde vergadering van vooraanstaande geleerden demonstreerde Dudeney zijn meetkundige oplossing van de puzzel en toonde hij tevens het scharnierende model van figuur 5.

Op het internet zijn fraaie applets te vinden, waarmee de transformatie van driehoek naar vierkant en omgekeerd in bewegend beeld wordt gedemonstreerd. Een heel mooi voorbeeld geeft de Franstalige website [2].

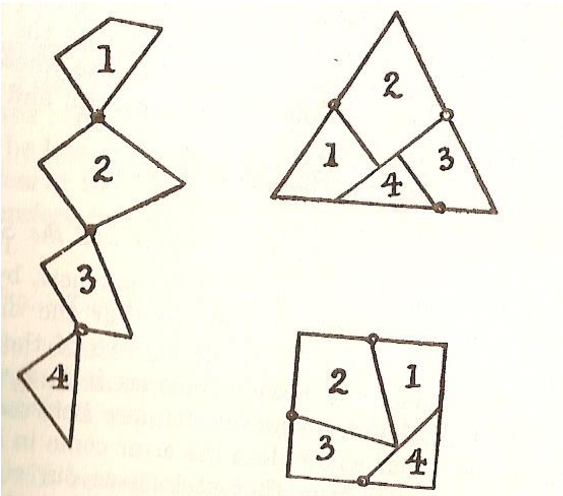

Fig. 5. De scharnierpuzzel uit de Canterbury Puzzles van Dudeney.

Dudeney's oplossing

In de *Canterbury Puzzles* houdt de haberdasher het pelgrimsgezelschap een gelijkzijdig, driehoekig stuk doek voor en vraagt hoe het doek in slechts vier delen moet worden geknipt, opdat de afzonderlijke delen een vierkant vormen. Gelukkig geeft Dudeney ook een oplossing, want het is - op zijn zachtst gezegd - niet gemakkelijk de gewenste dissectie van de gelijkzijdige driehoek zelf te vinden.

Het is niet bekend hoe Dudeney op zijn oplossing is gekomen, maar uit zijn constructie in figuur 6 is zijn gedachtegang goed te volgen. Dudeney geeft een fraaie en zuivere constructie met passer en liniaal. Hij maakt dus geen enkele berekening en maakt ook niet slinks gebruik van rationale benaderingen van lijnstukken met een irrationale lengte.

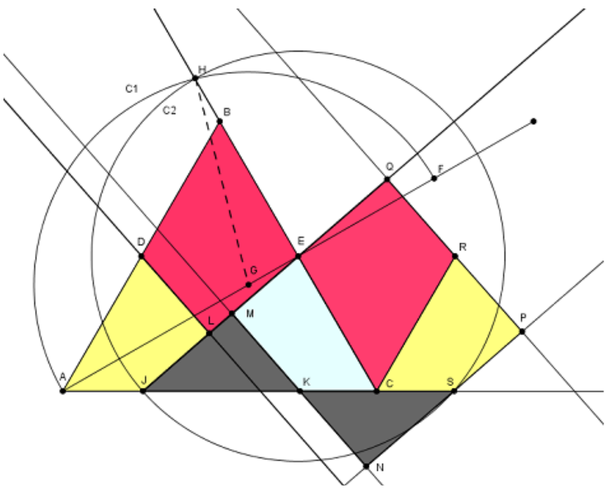

Fig. 6. De constructie van Dudeney met passer en liniaal

In figuur 6 is scharnierende beweging in één blik te zien en is in te begrijpen hoe de driehoek en het vierkant samenhangen. De vier onderdelen van de driehoek (en het vierkant) hebben speciale, samenhangende maten, waarvan de exacte waarden uit de constructie volgen. Het beschrijven van deze maten is nogal meetkundig/technisch van aard, zodat we hier de constructie van Dudeney niet uitwerken. Geïnteresseerden kunnen mailen naar Simon van der Salm: s.salm@kpnmail.nl. Per omgaande wordt dan de uitwerking van het bewijs en analyse van de constructie in figuur 6 toegezonden.

Referenties

[1] http://www.craftsmanspace.com/free-projects/haberdashers-problem-puzzle-plan.html
[2] http://perso.orange.fr/therese.eveilleau/pages/truc_mat/textes/dudeney_tr.htm
[3] The MacTutor History of Mathematics archive: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/