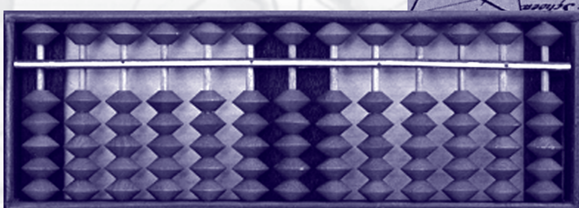
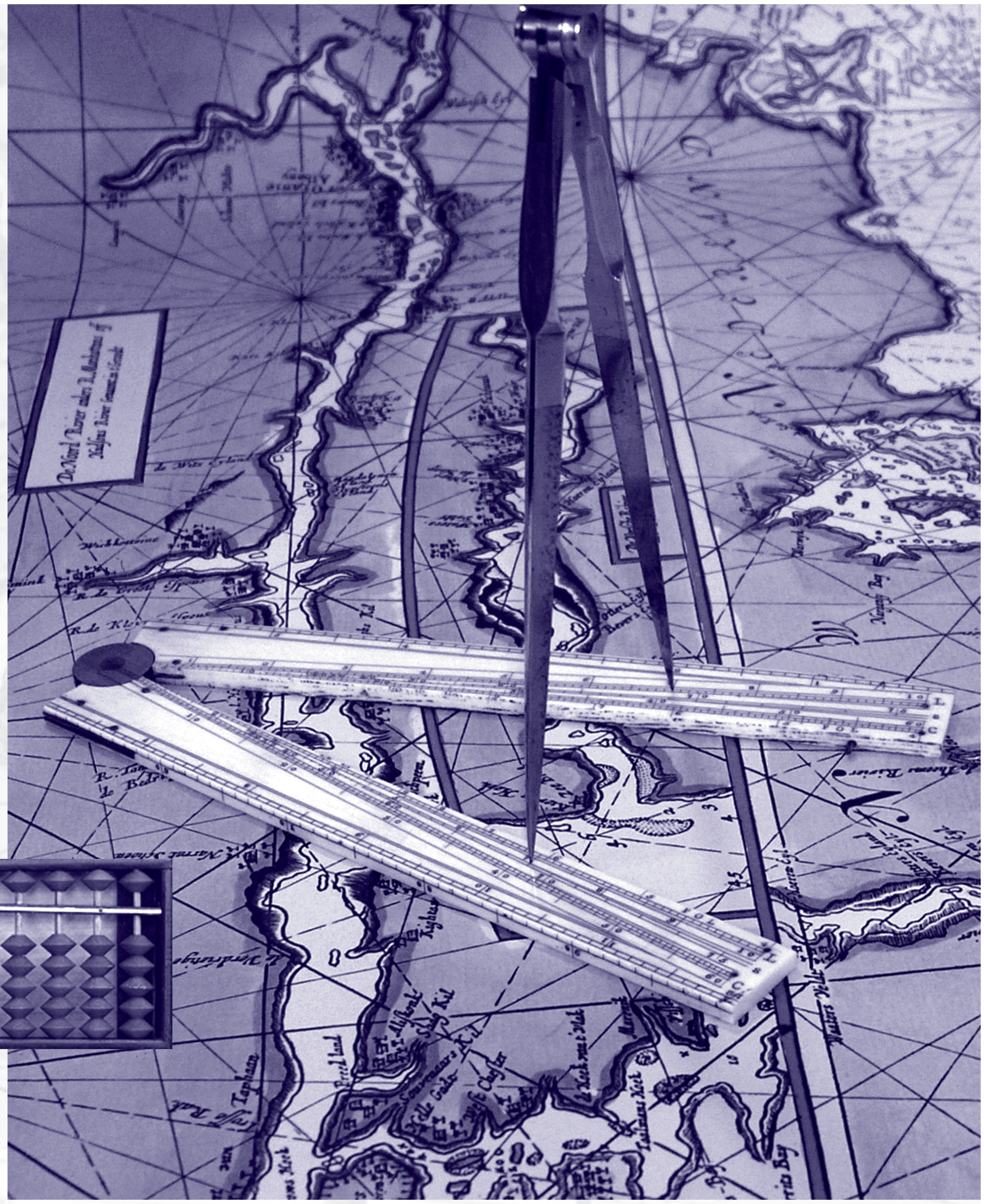


FIGUUR 1 Japanse Soroban Abacus



FIGUUR 2 Proportionaalpasser met steekpasser

REKENINSTRUMENTEN IN MAATSCHAPPIJ EN SCHOOL

[Otto van Poelje en Simon van der Salm]

Wiskunde- en rekenonderwijs sinds de 17e eeuw

Al duizenden jaren gebruikt men rekeninstrumenten en beoefent men wiskunde.
Het kennisniveau van een hedendaagse, wiskundig begaafde middelbare scholier is ongetwijfeld veel hoger dan dat van een 17e-eeuwse hoogleraar in de wiskunde.
En wat deze professor naast wiskunde nog te vertellen had - in het Latijn uiteraard - over astrologie en mystieke of kabbalistische onderwerpen, past zeker niet meer in het hedendaagse curriculum.
Wiskundigen sinds de 17e eeuw, waaronder Descartes, Newton, Leibniz, Euler, de Bernoulli's en Laplace, hadden er geen idee van dat hun wiskunde in het onderwijs voor tieners zou worden opgenomen.
Deze mathematici zouden stomverbaasd toekijken hoe scholieren een sinus kunnen berekenen, simpelweg door het indrukken van een paar knopjes op een apparaatje dat die genieën helemaal niet als rekenmachine zouden herkennen.
En de laatste decennia is het curriculum van de middelbare school zelfs nog uitgebreid met kansrekening en statistiek, lineair programmeren en dynamische modellen. In de 60er jaren kwam die leerstof pas na de propedeuse van de toenmalige Technische Hogeschool aan de orde. Nu komt het al op het bordje van tieners terecht.

We kunnen de 17e eeuw beschouwen als het startpunt van moderne rekenmachines. Rekenapparatuur werd meestal direct na uitvinding enthousiast in gebruik genomen door astronomen, landmeetkundigen en kooplieden. Opmerkelijk is het dat men pas sinds kort rekenmachines in het middelbaar onderwijs accepteert. Rekenmachines zijn zelfs onmisbaar geworden in het huidige wiskunde- en rekenonderwijs.
Door de publicaties van Simon Stevin, Bartjens en vele anderen is het rekenonderwijs zo verbeterd, dat in Nederland iedere leerling halverwege het basisonderwijs de basale rekenkundige functies kan uitvoeren. In de vroege 17e eeuw werd dit niveau van rekenen slechts door een handjevol specialisten bereikt.

De vroegste rekenmachines

De allereerste vormen lijken in onze moderne ogen niet erg machinaal. Het waren *knikkers* in het zand of *rekenpenningen* op een tableau, die door hun numerieke waarde en specifieke positie gebruikt konden worden voor optellen en aftrekken van getallen in het gangbare talstelsel.
Men rekende vaak in talstelsels met een basis die nauw gekoppeld was aan de diverse waarden van de gebruikte munten en gewichten. Vóór de 17e eeuw werd het decimale stelsel nauwelijks gebruikt.
Als telkralen ingebed worden in een frame, ontstaat de *abacus*, die meer herkenbaar is als rekenmachine.
De vroegste telramen, uit de Griekse, Romeinse en Aziatische culturen tot aan de Middeleeuwen, zijn slechts bekend als zeldzame museumobjecten of uit beschrijvingen in oude manuscripten.

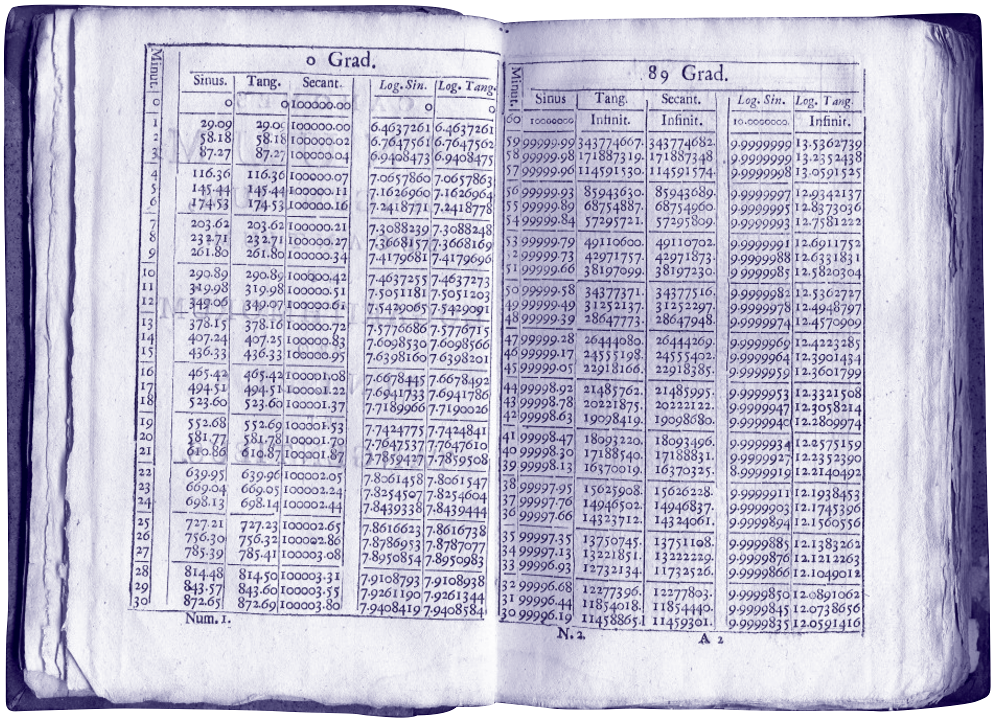
Tot de dag van vandaag gebruikt men nog steeds de abacus: in China de *Suan-Pan*, in Japan de *Soroban* (zie figuur 1) en in delen van de voormalige Sovjet-Unie de *Stschoty*. Deze telramen zijn in eerste instantie ontwikkeld voor decimaal optellen en aftrekken, maar een geoefende gebruiker kan er ook mee vermenigvuldigen en delen. En zelfs worteltrekken is met een abacus niet erg moeilijk. Tienjarigen in China en Japan kunnen met de abacus zelfs aanzienlijk sneller rekenen dan kinderen in de westerse wereld, met hun moderne elektronica. Beroemd is het verhaal dat in 1946 een wedstrijd in de vier basis rekenfuncties gehouden werd met een elektrische rekenmachine en een Soroban, waarbij de Japanner met zijn abacus van een halve dollar vier van de vijf onderdelen won.

Algoritmen en rekeninstrumenten

Terwijl de abacus duidelijk een mechanische rekenmachine is, werd gedurende de Middeleeuwen in Europa een handmatige methode van cijferen verder ontwikkeld: het rekenen met Arabische cijfers, met pen en papier. Het rekenen met pen en papier kan men echter ook opvatten als een *abstracte machine*. Die machine bestaat uit papier, pen en een stel regels, ook wel *algoritme* genoemd, waarmee een opgave op papier wordt opgelost. Een algoritme is een opeenvolging van rekenregels die, als ze blindelings worden gevolgd, automatisch het resultaat van een berekening opleveren. Algoritmen komen niet alleen voor bij het rekenen met pen en papier, maar bij elk rekenhulpmiddel, of het nu gaat om de opeenvolgende handelingen die met de kralen van een abacus worden uitgevoerd, de volgorde van de diverse toetsen op een calculator of het bewerken van afgelezen waarden uit een logaritmetabel.
Elk hulpmiddel waarmee we rekenalgoritmen kunnen uitvoeren, zullen we hier een *rekeninstrument* noemen. Met deze nieuwe definitie van het begrip rekeninstrument in bredere zin vinden we nog andere, soms onverwachte, voorbeelden van rekeninstrumenten:
- de *steekpasser*, die rond onze Gouden Eeuw (en veel later ook nog) gebruikt werd bij het rekenen op de *proportionaalpasser* van Galileo Galilei (zie figuur 2), en de *logaritmische schaal* van Edmund Gunter;
- de *niet-logaritmische rekenboeken*, zoals bijvoorbeeld de *Calculateur Universel* (Algemeen Rekenwerk) van Jean Bergmann, begin 20e eeuw, met regels en tabellen voor vermenigvuldigingen en delingen met getallen tot zes cijfers;
- de *numerieke algoritmen* voor een programmeerbare computer, bijvoorbeeld *stroomdiagrammen* en *Fortran-code* voor de nulpuntsbepaling van een functie volgens Newton-Raphson.

Rekenlinialen

Zie ook de bronnen [1] en [2].
In 1614 publiceerde Napier zijn standaardwerk over de logaritme, niet als inverse functie voor



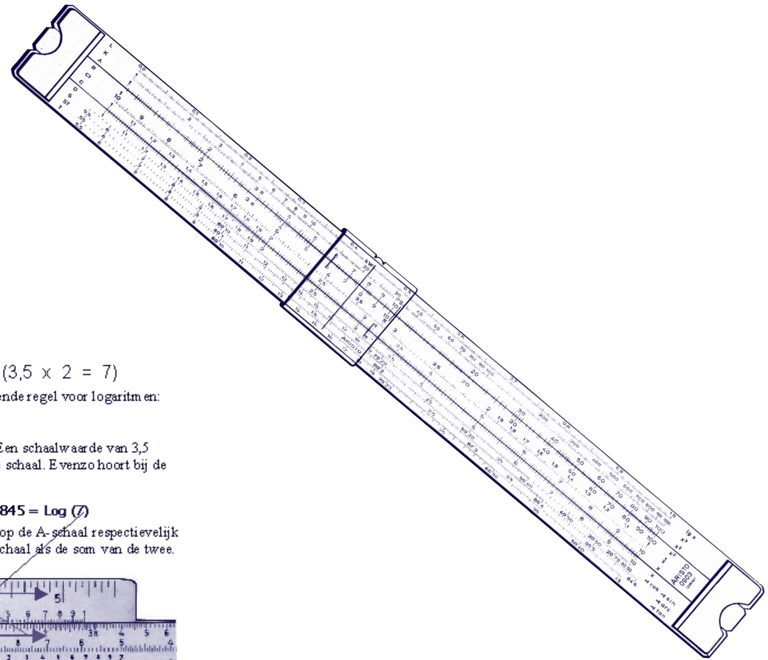
FIGUUR 3 18e-eeuwse logaritmentabel

exponentiële functies, zoals we tegenwoordig de logaritme interpreteren, maar als methode voor het versneld kunnen uitvoeren van vermenigvuldigingen via de regel log(ab) = log(a) + log (b).
Daartoe berekende hij de eerste *logaritmetabel*; zie figuur 3. Aan zo'n tafel bestond grote behoefte bij rekenintensieve toepassingen als de astronomie en de navigatie op zee. Laplace moet - bijna 200 jaar later - hebben gezegd: 'Het verkorten van het rekenwerk door de logaritme heeft het leven van de astronoom verlengd.'
Nog geen tien jaar na Napiers publicatie ontstonden de eerste ideeën voor logaritmische rekeninstrumenten. In 1624 beschreef Edmund Gunter een vaste liniaal met *logaritmische schalen*, die in combinatie met een *steekpasser* werd gebruikt. Rond 1632 ontwierp William Oughtred de bekende rekenliniaal en rekenschijf, die bestaan uit logaritmische schalen die ten opzichte van elkaar kunnen worden verschoven of gedraaid.
Na succesvolle invoering van de gespecialiseerde rekenliniaal in vakgebieden als zeenavigatie, militaire en civiele techniek en belastingheffing op alcohol, ontwikkelden wiskundigen en ingenieurs vanaf 1775 diverse soorten algemene rekenlinialen. Bekende types zijn de *SOHO-liniaal* van James Watt (1775), de liniaal met de schalenconfiguratie en de loper van *Mannheim* (1850), de liniaal met het meest toegepaste systeem, de *Rietz* (1902) en de *Darmstadt-liniaal* (1935). Zie figuur 4 voor een veelgebruikte schoolliniaal uit de 70-er jaren.
Circa 1850 begonnen de hoogtijdagen van de rekenliniaal, die men industrieel ging produceren met grote nauwkeurigheid en in vele soorten en maten. De vroege materialen zoals massief hout, ivoor en metaal, verving men langzamerhand door laminaten van hout en celluloid of kunststof, en vanaf 1935 door pure plastics. Naast de meest voorkomende lineaire vorm, ontwierpen instrumentmakers, en later fabrikanten, steeds ingenieuzere rekenschijven en -cilinders, omdat daarmee langere schalen in spiraalvorm of als evenwijdige deelschalen kunnen worden gebruikt waardoor een grotere precisie mogelijk wordt.
De meest uitgebreide linialen hebben meer dan 30 schalen, verdeeld over de twee kanten van de schuif en het lichaam in een zogenaamde *Duplex-constructie*. Naast vermenigvuldigen en delen, kan men met deze linialen worteltrekken, kwadrateren en kuberen, maar ook e-machten en algemene machten berekenen via dubbellogaritmische schalen, en bovendien rekenen met goniometrische en hyperbolische functies.
Diverse hulpschalen, zoals *inverse en verschoven schalen*, maken het mogelijk samengestelde berekeningen zoveel mogelijk aansluitend te laten verlopen. Het was voor een geoefende gebruiker een uitdaging om een berekening van een complexe formule met een minimaal aantal schuifoperaties zo snel mogelijk uit te voeren.
Fabrikanten van rekenlinialen ontwierpen, naast de algemene rekenliniaal, honderden gespecialiseerde rekenlinialen voor toepassingen in de meest uiteenlopende vakgebieden, van berekeningen voor betonsterkte, rioolbuis-dimensionering of elektrotechnische calculaties tot zelfs statistische toetsen.

Mechanische rekenmachines

Zie ook de bronnen [3] en [6].
Terwijl Napier aan het concept van de logaritme

FIGUUR 4a



FIGUUR 4b Aristo 0903 schoolliniaal

werkte, vond hij nog een ander hulpmiddel uit voor het uitvoeren van vermenigvuldigingen, de *Napier-staafjes* (zie [5]). Met die staafjes wordt het 'pen-en-papier'-algoritme voor een productberekening aanzienlijk vereenvoudigd.
In 1623 paste Wilhelm Schickard de Napier-staafjes toe in een *draai- en schuifconstructie* voor berekeningen met getallen tot zes cijfers. Het bijzondere aan zijn apparaat was dat de laatste stap van de staafjesprocedure, namelijk de optelling van de zescijferige deelproducten, geautomatiseerd werd in een houten tandwielkast met 10-overloop. Dit was de eerste rekenmachine met mechanische optelling, die nog maar sinds midden 20e eeuw bekend is. Sindsdien bouwden enthousiaste wiskundigen een aantal replica's.

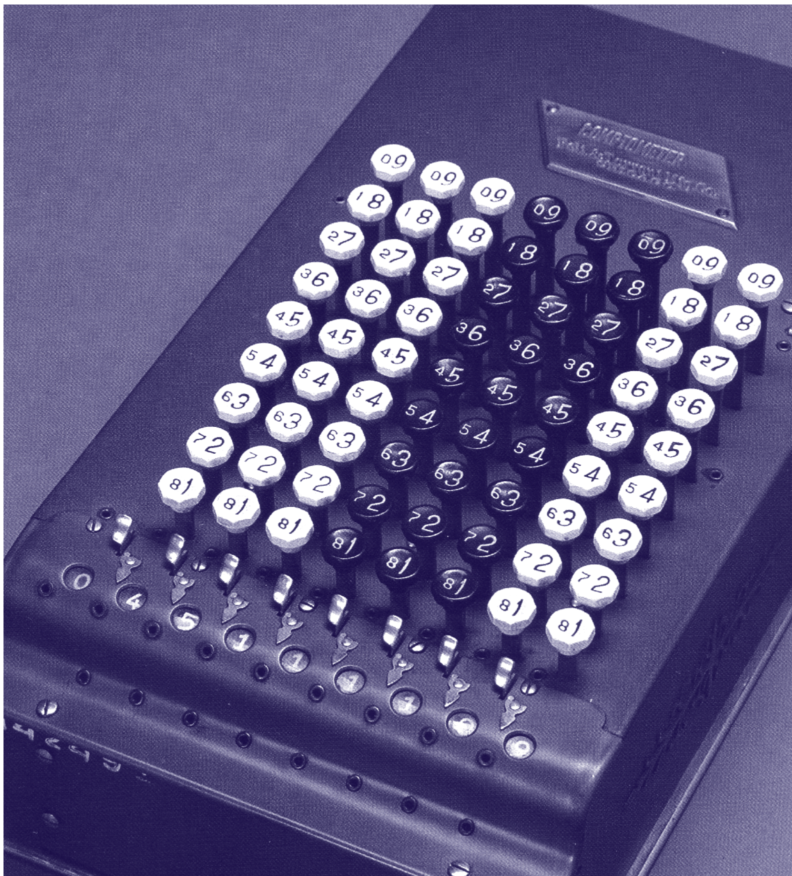
Ook Blaise Pascal heeft in 1642 een mechanische opteller ontworpen en laten bouwen, de *Pascaline*. Deze kon getallen tot 10 cijfers verwerken, waarvan sommige niet-decimaal vanwege het Franse muntstelsel waarvoor de rekenmachine bedoeld was. Onder de pure optellers nam de *Comptometer* van Felt (eind 19e eeuw) een aparte plaats in (zie figuur 5). Op een tweedimensionaal ($n \times 10$)-toetsenbord konden getallen tot n cijfers *direct* worden opgeteld door alleen de diverse cijfertoetsen in te drukken. Een functietoets was niet nodig, want optelling was de enige operatie.

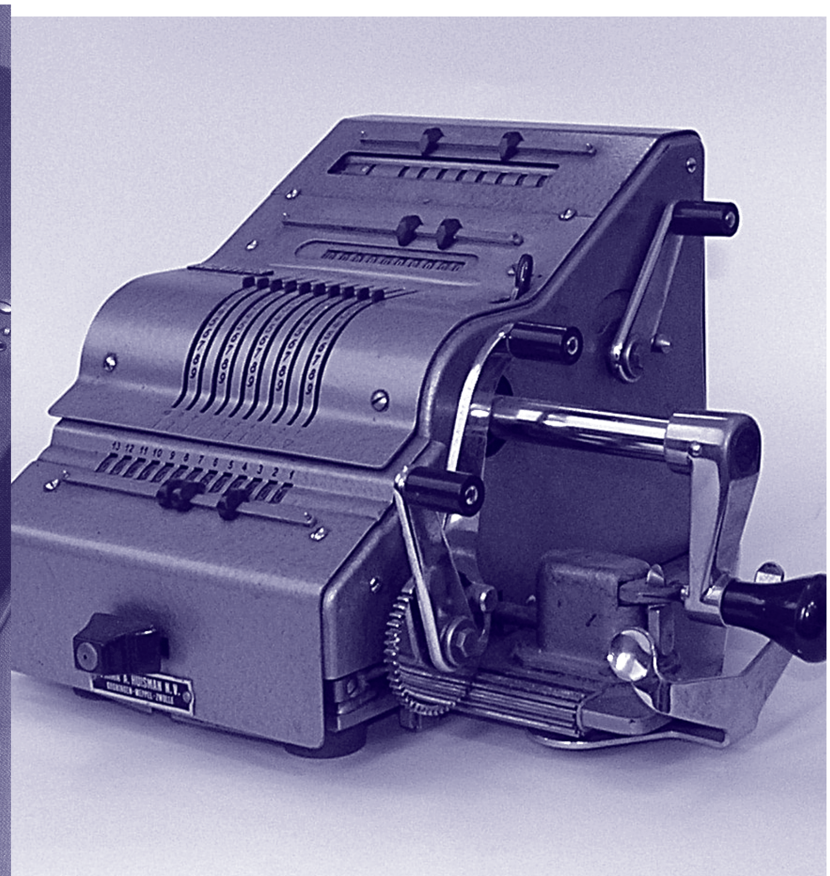
Elke opteller kan uiteindelijk ook vermenigvuldigen door repetitie. Leibniz ontwierp in 1672 een mechanisme voor repeterend optellen, met de *Pascaline* als uitgangspunt. Uiteindelijk resulteerde het mechanisme van Leibniz in de zogenaamde *staffelwalsvermenigvuldiger*. Slimme instrumentmakers ontwikkelden vele varianten van dit principe, bijvoorbeeld Hahn, die de ronde vorm bedacht, en Thomas de Colmar die de *Arithmometer* ontwierp.

Eind 19e eeuw vonden Odhner in Europa en Baldwin in de USA een volledig nieuwe techniek uit voor herhaald optellen. Hun rekenmachines maakten gebruik van schijven, die van pennen waren voorzien. Men spreekt in het Engels van *pinwheels* en in het Duits van *Sprossenräder*. Vele fabrikanten produceerden dergelijke rekenmachines, die wel op een handnaaimachine met draaislinger lijken (zie figuur 6). Men gebruikte die rekeninstrumenten nog tot eind 60'er jaren, bijvoorbeeld voor valutaconversie in bankkantoren. Daarnaast bedachten innovatieve fabrikanten vele andere rekenmachines. Twee bekende voorbeelden zijn de direct vermenigvuldigende *Millionaire* en de uiterst compacte *Curta*. Onder de optellers (zie figuur 7) kent men namen als: *addiators, adders, addometers, calcumeters* etc. In de 20e eeuw voorzag men deze rekenmachines bovendien van afdrukmechanismen en elektrische aandrijving, waardoor gemak en functionaliteit aanzienlijk toenamen.

Elektronische rekenmachines en computers

Rond de Tweede Wereldoorlog ontwikkelde men de eerste elektrische en elektronische computers. Bekende namen zijn ZUSE, COLOSSUS, ENIAC, UNIVAC, en in Nederland de ARRA, PTERA, ZEBRA en PASCAL. Het logische schakelwerk in die binaire machines, implementaties van de 19e-eeuwse algebra van George Boole, bestond aanvankelijk uit telefoonrelais en later uit radiobuizen.
De eerste moderne computers rekenden aan specifieke





FIGUUR 5 Comptometer
FIGUUR 6 Brunsviga rekenmachine volgens principe Odhner

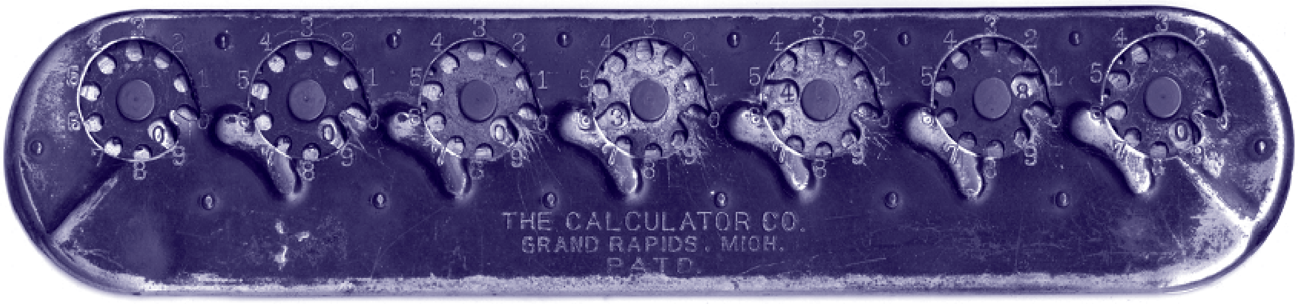
wetenschappelijke problemen, in tegenstelling tot de algemene *data handling* taken die de huidige computers uitvoeren.
In de 70er jaren leidden de sterk toegenomen miniaturisatie en drastische prijsverlagingen ertoe dat de *zakcalculator* voor iedereen bereikbaar werd (zie [4]).

Rekenen is, zeker buiten het onderwijs, geen doel op zich, maar altijd onderdeel van een probleemoplossing: een cijferuitkomst is geen eindresultaat, maar slechts een tussenstap in een groter proces. Als dit proces geautomatiseerd wordt uitgevoerd door een machine, leidt dit tot de *embedded calculator*, de ingebedde rekenmachine zonder toetsen en resultatenvenster, die ongezien (en soms ongecontroleerd) zijn werk doet binnen een machine. Er zijn voorbeelden te over. Denk aan de rekenfuncties binnen een digitale camera, een wasmachine, of de streepjescodescanner met pinpaslezer bij de winkelkassa die als eindresultaat slechts laat zien: '*U heeft betaald*'.
Een andere fraaie en complexe toepassing van ingebedde rekenmachines vinden we in de nieuwste auto's, waarvan de fabrikant zich in allerlei bochten wringt om u er maar van te overtuigen dat uw emoties de auto beheersen, terwijl feitelijk een aantal uiterst rationele calculators uw stuurhandelingen bewaken.

Rekeninstrumenten in de school

In het onderwijs is vaak gezegd dat gebruik van zakrekenmachines het begrip van het rekenen ten gronde zou richten. Dat argument heeft oude wortels, getuige het volgende citaat. William Oughtred, de uitvinder van de rekenliniaal, wachtte jaren tot de publicatie van zijn baanbrekende vinding in 1632, in zijn eigen woorden:
'That the true way of Art is not by Instruments, but by Demonstration:
and that it is a preposterous course of vulgar Teachers, to begin with Instruments and not with the Sciences, and so instead of Artists to make their Schollers only doers of tricks, and as it were Juglers: to the despite of Art, losse of precious time, and betraying of willing and industrious wits unto ignorance, and idlenesse. That the use of Instruments is indeed excellent, if a man be an Artist; but contemptible, being set and opposed to Art.' Zie [1].

Is het begriploos uitschrijven van een staartdeling zoveel beter dan het begriploos intypen van die deling in een zakcalculator? Gecijferdheid, het begrip voor cijferen en vooral voor de aannemelijkheid van een uitkomst, wordt niet zozeer bereikt door instrumenten voor simpele repetitieve taken tegen te houden, maar veeleer door begrip voor getallen aan de onderwijsstof toe te voegen.
Toch valt het op, dat men tot voor kort in lagere en middelbare scholen weinig gebruik maakte van rekeninstrumenten. Uitzonderingen waren simpele telramen, voor demonstratie van de 10-overloop, rekenlinialen (die maar heel even tot het curriculum behoorden en meer bedoeld waren om leerlingen het principe van de logaritmische schaal duidelijk te maken) en een paar jaar later elektronische rekenmachines. Verder had men geen grote bezwaren tegen het gebruik van logaritmetabellen. Daarentegen leerden studenten in het voortgezet en hoger militair,



FIGUUR 7 'Adder' van The Calculator Company

nautisch en elektrotechnisch onderwijs al in de negentiende eeuw, vanaf hun eerste studiedag, ook werken met rekenlinialen.
Was het de prijs die invoering van rekenhulpmiddelen in het middelbaar onderwijs tegenhield, of waren het didactische of pedagogische belemmeringen? Of was de docent bang een stukje van zijn status kwijt te raken, als de leerling net zo goed kon rekenen als hij?

Mechanische rekenmachines waren eeuwenlang duur. Leraren konden ze wel als demonstratie-exemplaren voor 'real-life' rekenen gebruiken (gebeurde dat ook?), maar voor gebruik door leerlingen waren ze te kostbaar. Bovendien waren ze ook nog eens moeilijk hanteerbaar door complexe bediening, omvang en gewicht. Pas de rekenliniaal en de elektronische rekenmachine werden in de loop van de jaren '70 goedkoop en handzaam genoeg om per leerling aangeschaft te worden.
De rekenliniaal lijkt echter nooit echt populair geweest te zijn in het voortgezet onderwijs. Alleen de kleine groep docenten met een technische achtergrond had belangstelling voor dit rekenmiddel. Vermoedelijk vonden de meeste wiskundeleraren het een overbodig instrument. En hoeveel moeilijkheden moesten niet overwonnen worden voordat de zakrekenmachine in het wiskundeonderwijs werd geaccepteerd?

De grafische rekenmachine is inmiddels geaccepteerd als onmisbaar hulpmiddel bij het wiskundeonderwijs in de bovenbouw van havo en vwo. Door de intelligente mogelijkheden van deze machine wordt niet alleen numeriek rekenwerk efficiënt en effectief uitgevoerd, maar kan hij, door zijn grafische en simulatiemogelijkheden, ook dienen als een krachtig hulpmiddel bij het verkrijgen van dieper mathematisch inzicht.
En dat alles geldt nog sterker voor de modernste computerprogramma's, die het wiskundeonderwijs ongetwijfeld minder algoritmisch, maar wel interessanter zullen maken. Daardoor zal het wiskundeonderwijs ook beter aansluiten bij de ontwikkelingen in de maatschappij. En bovendien wordt daardoor het werk van de wiskundeleraar aangenamer: immers zijn taak wordt veel meer het kweken van mathematisch begrip en inzicht bij zijn leerlingen, waarbij slimme algoritmemachines het relatief domme werk mogen verrichten. En het betreft niet alleen algoritmen voor numeriek rekenen. Denk bijvoorbeeld ook aan symbolisch differentiëren, integreren of het oplossen van differentiaalvergelijkingen.

Conclusie

We zien duidelijk dat maatschappij en school vroeger gescheiden functioneerden: terwijl rekeninstrumenten overal in de maatschappij in een vroeg stadium van ontwikkeling werden geaccepteerd, deed het onderwijs er meer dan 100 jaar over om te erkennen dat door mensen uitgevoerde algoritmen net zo goed – en meestal zelfs beter - door rekeninstrumenten kunnen worden uitgevoerd. De laatste jaren echter zet de trend door, dat onderwijs in rekenen en wiskunde steeds meer wordt ondersteund door tijdbesparende en visualiserende rekeninstrumenten zoals de grafische rekenmachine en gespecialiseerde computersoftware.

Bronnen

[1] F. Cajori: A History of the Logarithmic Slide Rule and Allied Instruments. Mendheam (NY): Astragal Press. Reprint 1994, naar het origineel van 1910; ISBN 1 879335 52 2.
[2] D. von Jezierski: Slide Rules, A Journey through Three Centuries. Mendheam (NY): Astragal Press (2000); ISBN 1 879335 94 8.
[3] T.A. Russo: Antique Office Machines, 600 Years of Calculating Devices. Schiffer Books, USA (2001); ISBN 0 7643 1346 0.
[4] De Teloorgang van de Rekenliniaal: www.rekenkring.nl/historie.htm
[5] Uitleg van de Napierstaafjes: http://mathworld.wolfram.com/NapierBones/
[6] Die Geschichte der Rechenhilfsmittel: www.rechenhilfsmittel.de
[7] Nederlandse Kring van Verzamelaars van Rekenlinialen: www.rekenlinialen.org

Over de auteurs

Otto van Poelje (e-mailadres: poelje@rekenlinialen.org) werkte tot zijn pensionering enkele jaren geleden als wiskundig ingenieur in de telecommunicatie-industrie bij Philips, AT&T en Lucent Technologies. Zijn interesse ligt momenteel op het gebied van de 17e eeuwse rekeninstrumenten zoals de Gunterliniaal, die werd toegepast bij de navigatie op zee.
Simon van der Salm (e-mailadres: salm@rekenlinialen.org) is docent wiskunde bij het Adriaan Roland Holst College in Hilversum waar hij werkt voor Quest, een nieuwe vorm van leren. Zijn interesse betreft met name de mathematische achtergronden van historische rekeninstrumenten.

Over de 'Kring Historische Rekeninstrumenten'

Beide auteurs zijn lid van de KHR, de Kring Historische Rekeninstrumenten, voorheen de in 1990 opgerichte Nederlandse Kring van Verzamelaars van Rekenlinialen. Leden van de KHR doen onderzoek naar historische rekeninstrumenten, zoals bijvoorbeeld rekenlinialen, abaci, navigatiemiddelen en (elektro)mechanische reken apparatuur.
Website: www.rekenkring.nl; zie verder hieronder.

MEDEDELING / Kring Historische Rekeninstrumenten

[Simon van der Salm]

'REKENKRING' (*www.rekenkring.nl*) is de korte naam van de *Kring Historische Rekeninstrumenten* die bestaat uit liefhebbers, verzamelaars en onderzoekers van historische rekeninstrumenten in de meest brede zin van het woord, zoals rekenlinialen, mechanische en elektronische rekenmachines, proportionaalpassers, nomogrammen, tabellen-boeken, abaci, planimeters, passers en andere tekeninstrumenten, maat- en schaallatten, en andere rekenhulpmiddelen.
Het interessegebied van de REKENKRING is gericht op historie, ontwerp, constructie, productie, verzamelen en restauratie, maar ook toepassingen, rekentechnieken en gebruik van de vele soorten rekeninstrumenten die exacte wetenschappers, technische vakmensen en andere gebruikers in het verleden tot steun zijn geweest.

De doelstellingen van de REKENKRING zijn:
- onderlinge ondersteuning van de leden in hun REKENKRING-activiteiten;
- verbreiding van algemene kennis en besef van het historisch belang van rekeninstrumenten.

De REKENKRING is voornamelijk Nederlandstalig. Voor internationale contacten maakt de REKENKRING gebruik van de Engelse naam, 'Dutch Circle for Historical Calculating Instruments'.

De REKENKRING komt voort uit de 'Nederlandse Kring van Verzamelaars van Rekenlinialen', en omvat ook een aantal leden van de voormalige vereniging 'Mercurius' voor historische kantoormachines.

Nadere informatie is te verkrijgen bij Otto van Poelje (*poelje@rekenlinialen.org*) of Simon van der Salm (*salm@rekenlinialen.org*), of via de website *www.rekenkring.nl*.